CHAPITRE 2 : *Théorèmes de bases d'analyse des circuits électriques*

L'objectif est de présenter les principaux théorèmes permettant de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

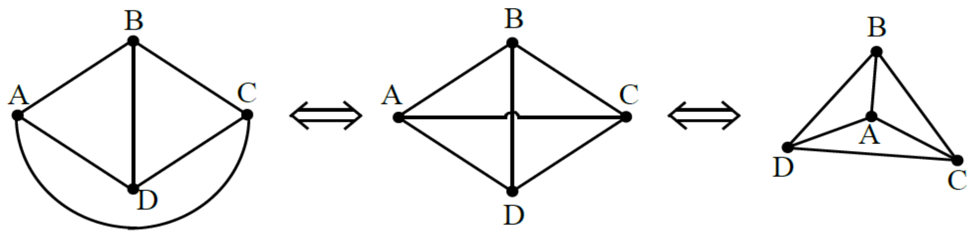
1. Définitions utiles

- Un fil est une résistance quasiment nulle. Placé en série, un fil ne modifie pas la résistance mais placé en parallèle, il court-circuite la résistance.
- Un interrupteur ouvert est équivalent à une résistance infinie. Placé en parallèle, il ne modifie rien mais en série, cela revient à supprimer la branche étudiée.
- Un nœud est un point de jonction de plusieurs conducteurs.
- Une branche est une portion de circuit entre 2 nœuds.
- Une maille est un parcours fermé constitué de branches et ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

  Une maille est dite indépendante si une ou plusieurs branches lui appartiennent exclusivement. La maille indépendante est forcément adjacente à au moins une autre maille. Dans ce cas si un réseau comporte N nœuds et B branches, il comporte alors M mailles indépendantes :

$$\boxed{\boldsymbol{M = B - N + 1}}$$

- Un graphe est un schéma représentatif de la topologie du réseau (nature et nombre d'interconnexions) indépendamment de sa forme réelle.



- Passiver (ou éteindre) une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.
- Eteindre une source de tension idéale est équivalent à un interrupteur fermé (fil).
- Eteindre une source de courant idéale est équivalent à un interrupteur ouvert.

2. Lois de Kirchhoff

Il existe deux lois de KIRCHHOFF : l'une relative aux nœuds et l'autre relative aux mailles. Ce sont des lois générales de l'électrocinétique applicables à des réseaux comprenant des éléments linéaires ou non. Elles sont valables en courant continu et en courants variables dans le cadre de l'ARQS.

2.1. Loi de KIRCHHOFF relative aux nœuds

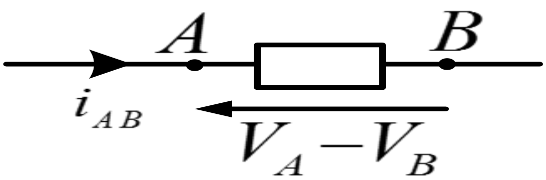
Cette loi traduit la conservation de la charge électrique. On considère un nœud et l'ensemble des branches connectées à ce nœud. On choisit sur chaque branche un sens positif arbitraire du courant. Soit alors I_k les intensités du courant circulant dans les branches. Elles vérifient :

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0}$$

où $\varepsilon_k = +1$ si i_k est dirigé vers le nœud et $\varepsilon_k = -1$ sinon.

2.2. Loi de KIRCHHOFF relative aux mailles

Elle traduit l'existence d'une fonction potentiel. On considère une branche quelconque comme représentée ci-dessous



La loi d'Ohm s'écrit sous la forme générale algébrisée :

$$V_A - V_B = r_{AB} i_{AB} - \varepsilon_{AB} e_{AB}$$

où ε_{AB} vaut $+1$, 0 ou -1 :

- ✓ $\varepsilon_{AB} = 0$ si le dipôle est passif ;
- ✓ ε_{AB} a le signe de la borne par laquelle on sort du dipôle si celui-ci est polarisé ;
- ✓ ε_{AB} est de sens contraire à celui de i_{AB} si le dipôle n'est pas polarisé.

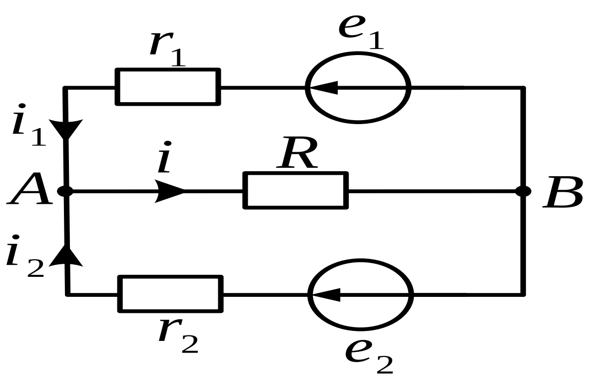
En sommant les différences de potentiel $V_A - V_B$ sur la maille, il vient :

$$\boxed{\sum r_{AB} i_{AB} - \sum \varepsilon_{AB} e_{AB} = 0}$$

C'est la loi de KIRCHHOFF relative aux mailles.

Exercice d'application

On considère le réseau de la figure suivante

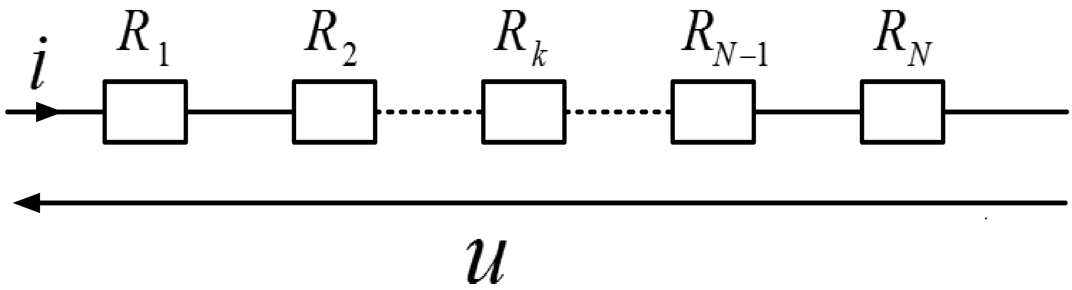


Par application des lois de KIRCHHOFF, déterminer le courant i circulant dans la résistance R. Application numérique : $e_1 = 6\,V$; $r_1 = 1\,\Omega$; $e_2 = 12\,V$; $r_2 = 2\,\Omega$; $R = 10\,\Omega$.

3. Pont diviseur de tension et pont diviseur de courant

3.1. Pont diviseur de tension

On considère l'association en série de N conducteurs ohmiques R_k avec k variant de 1 à N traversés par le même courant d'intensité i.



La résistance équivalente R_{eq} est :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \ldots + R_N$$

Soit u_k la tension aux bornes de la résistance R_k on a :

$$i = \frac{u_k}{R_k} = \frac{u}{R_{eq}}$$

On en déduit la loi diviseur de tension :

$$\boxed{u_k = \frac{R_k}{R_{eq}} u = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{N} R_k} u}$$

La tension u_k ainsi obtenue est inferieure à la tension u d'où le nom donné à cette loi : **Pont diviseur de tension.**

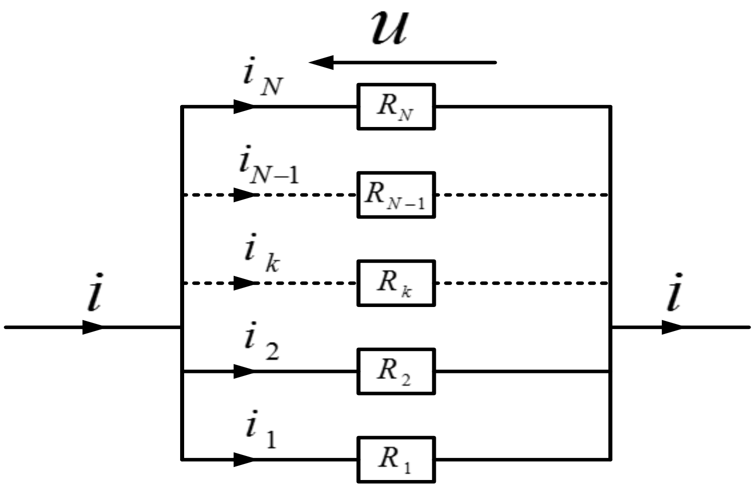
Cas $N = 2$

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad et \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u}$$

Si $R_1 = R_2$, il vient $u_1 = u_2 = u/2$: méthode demi-tension utilisée pour déterminer les résistances de grandes valeurs.

3.2. Pont diviseur de courant

On considère l'association en parallèle de N conducteurs ohmiques soumis à la même tension u. Le courant principal est i.



La résistance équivalente est :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

La tension u est égale :

$$u = R_k i_k = R_{eq} i$$

On en déduit la loi diviseur du courant :

$$\boxed{\boldsymbol{i_k = \frac{R_{eq}}{R_k} i}}$$

L'intensité i_k obtenue est toujours inferieure à i d'où le nom donné à cette loi : **Pont diviseur de courant.**

Cas $N = 2$

$$\boldsymbol{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \qquad et \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i}$$

Si $R_1 = R_2$, il vient $i_1 = i_2 = i/2$: méthode demi-courant utilisée pour déterminer les résistances de faibles valeurs.

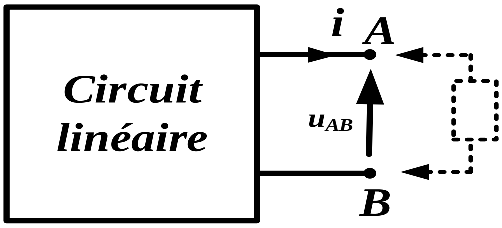
4. Théorème de Thévenin et de Norton

Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (calcul de la tension et du courant de sortie), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :

- soit sous la forme d'une source réelle de tension : c'est le modèle de Thévenin ou modèle générateur de tension,
- soit sous la forme d'une source réelle de courant : c'est le modèle de Norton ou modèle générateur de courant.

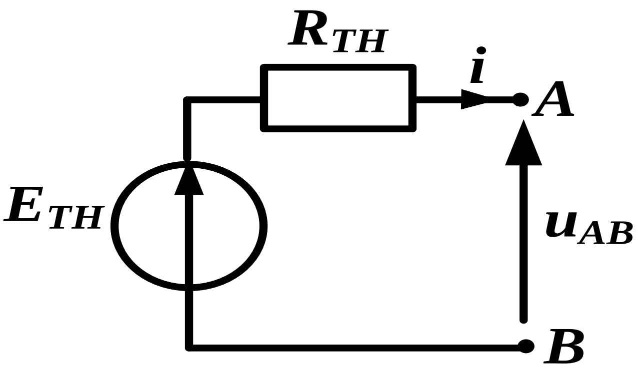
4.1. Représentation de Thévenin et Norton

Considérons un circuit électrique linéaire constitué des dipôles linéaires placé entre deux points A et B. En pratique il existe une charge (représentée en pointillé) qui ferme le circuit linéaire.



4.1.1. Représentation de Thévenin

Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B) le circuit précédent peut être remplacé ou modélisé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} :

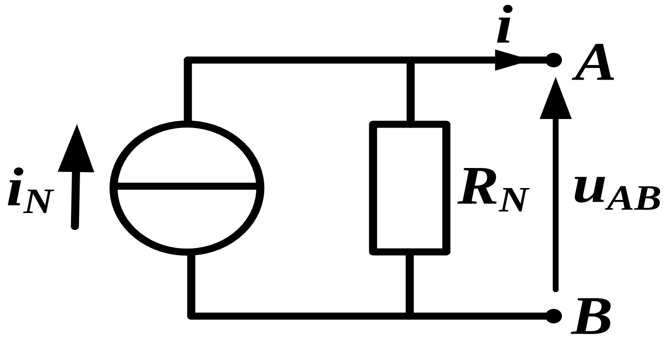


La tension vue entre A et B est égale à :

$$\boxed{u_{AB} = E_{TH} - R_{TH} i \Rightarrow i = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} - \frac{u_{AB}}{R_{TH}}}$$

4.1.2.Représentation de Norton

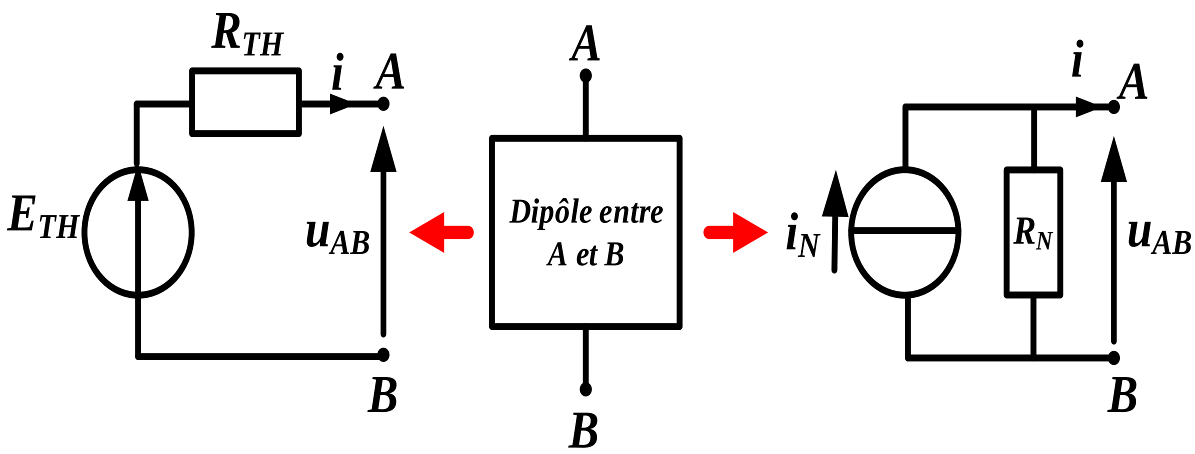
Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B) le circuit précédent peut être remplacé ou modélisé par un générateur de Norton équivalent de courant i_N et de résistance interne R_N :



$$\boxed{i = i_N - \frac{U_{AB}}{R_N} = i_N - G_N u_{AB}}$$

4.1.3.Equivalence entre les modèles

Il existe une équivalence entre les modèles de générateurs (Thévenin et Norton) dans la mesure où le courant i et la tension u_{AB} sont les mêmes quelque soit le circuit linéaire.



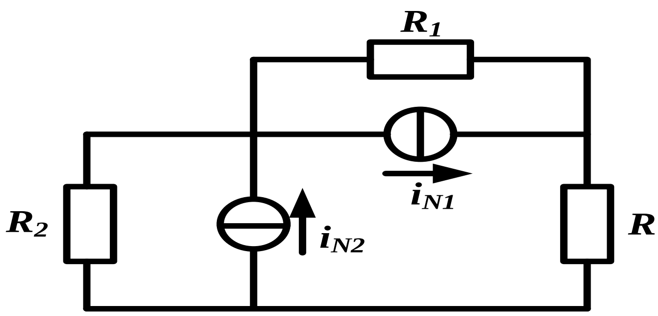
Le passage du modèle d'un générateur de Thévenin à celui d'un générateur de Norton conduit donc à trouver :

$$\boxed{R_N = R_{TH} \quad \text{et} \quad E_{TH} = R_{TH}.i_{TH} = R_{TH}.i_N}$$

Ces deux relations montrent que les générateurs de Thévenin et de Norton se déduisent l'une de l'autre. Ces deux générateurs sont très précieux dans l'analyse des circuits électriques et surtout électroniques.

Exercice d'application

Deux générateurs modélisés par leur modèle de Norton : Courants électromoteurs i_{N1} et i_{N2} ; résistances internes R_1 et R_2 sont placés en série avec une résistance R.

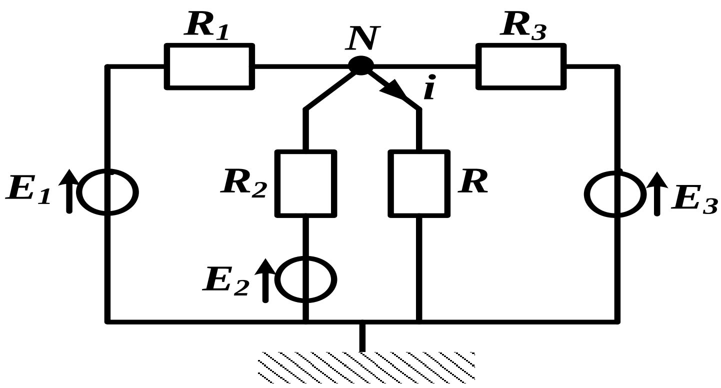


1) Convertir les deux générateurs de Norton en un générateur de Thévenin unique dont on précisera E_{th} et R_{th}.

2) En déduire la tension aux bornes de la résistance R, le courant i qui y circule et la puissance dissipée par effet Joule.

Exercice d'application

On considère le circuit suivant pour lequel on désire calculer le courant circulant dans la résistance R.



En remplaçant les générateurs de Thévenin par des générateurs de Norton, déduire alors la source de Thévenin branchée aux bornes de la résistance R et le courant i circulant dans cette résistance.

4.2. Théorème de Thévenin

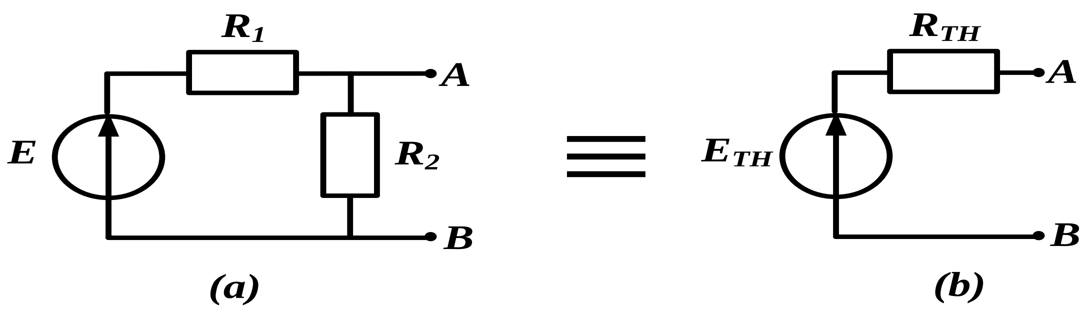
Enoncé du théorème

Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vis-à-vis des points A et B (c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B), ce circuit peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} :

- la valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- la résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Exemple d'application :

Calculons les caractéristiques du générateur équivalent de Thévenin de la figure (a) suivante.



La tension de Thévenin est la tension obtenue entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur de tension :

$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

La résistance de Thévenin R_{TH} est obtenue en passivant la source de tension E. Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit. Il vient donc :

$$R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur équivalent de Thévenin est donné par la figure (b).

4.3. Théorème de Norton

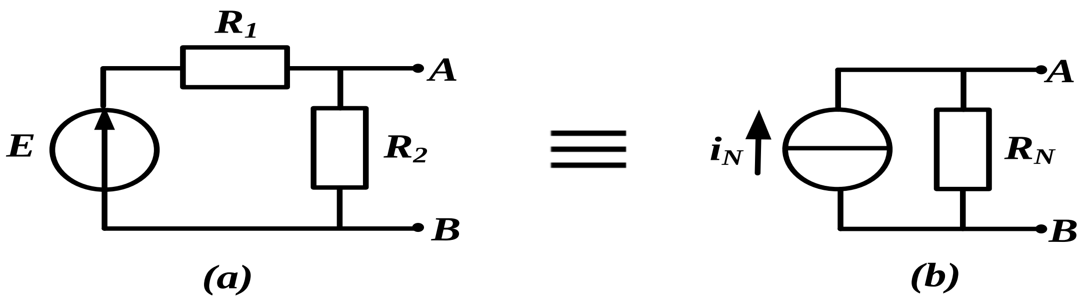
Enoncé du théorème

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B, par un générateur de Norton équivalent de courant i_N et de résistance interne R_N :

- la valeur i_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- la résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

Exemple d'application :

Calculer les caractéristiques du générateur de Norton équivalent de la figure (a) suivante.



Le courant i_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2. Il vient donc :

$$\boldsymbol{i_N = \frac{E}{R_1}}$$

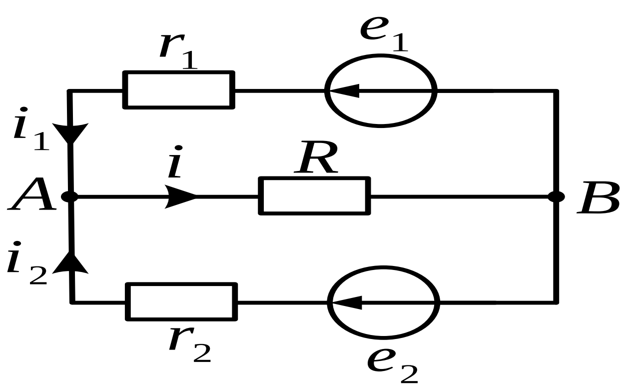
La résistance de Norton R_N est obtenue en passivant la source de tension E. Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit. Il vient donc :

$$\boldsymbol{R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

Le générateur de courant équivalent de Norton est donné par la figure (b).

- **Exercice d'application**

On considère le réseau de la figure suivante



Au moyen des théorèmes de Thévenin et Norton, déterminer le courant i_1 traversant le dipôle (e_1, r_1).

5. Théorème de superposition

Il est utilisé lorsqu'il s'agit de calculer un courant ou une tension dans un circuit comprenant 2, voire 3 sources indépendantes.

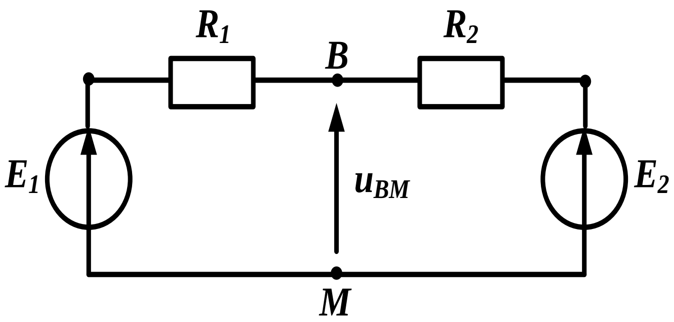
Enoncé du théorème

Soit un réseau linéaire comportant n sources idéales indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : S_1, S_2, S_3,…….., S_n et une grandeur à calculer, comme par exemple i_K le courant dans la branche K. Appelons i_{K_1}, i_{K_2}, i_{K_3}, ……., i_{K_n}, les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées (éteintes) et la configuration du réseau restant inchangée. L'expression de la solution générale donnant l'intensité du courant traversant la branche K est :

$$\boxed{i_K = i_{K_1} + i_{K_2} + i_{K_3} + \cdots + i_{K_n}}$$

Exemple d'application :

Calculons la tension u_{BM} dans la figure suivante :



- $Si\ E_2 = 0$,

$$u_{BM} = u_{BM_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1$$

- $Si\ E_1 = 0$,

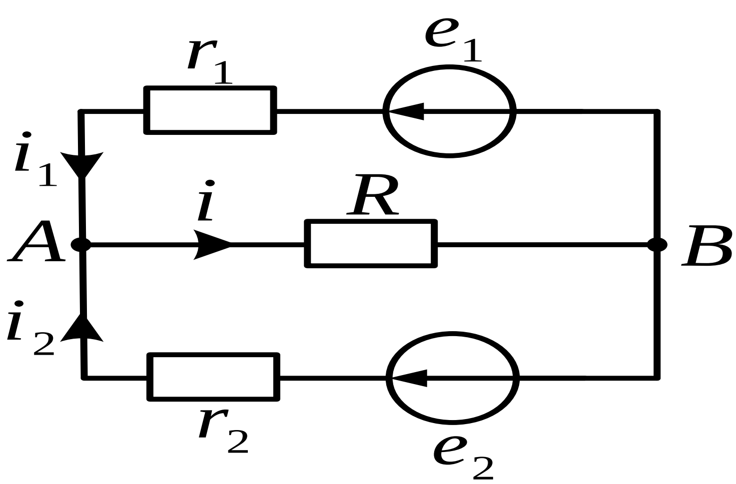
$$u_{BM} = u_{BM_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

Finalement en tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$u_{BM} = u_{BM1} + u_{BM2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

Exercice d'application

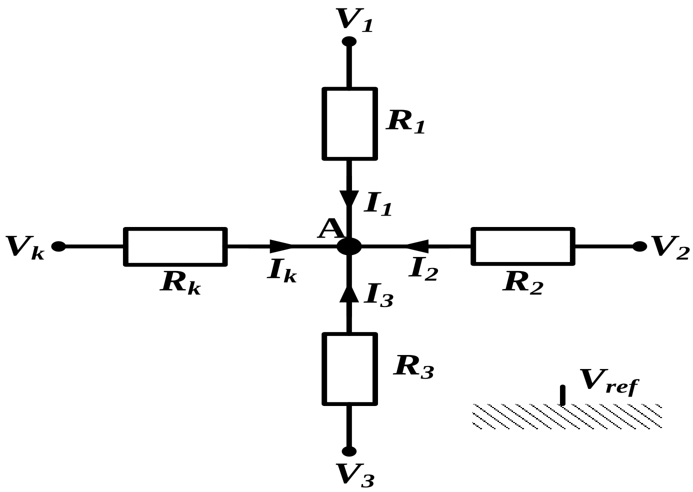
On considère le réseau de la figure suivante



Par application du théorème de superposition, déterminer le courant i circulant dans la résistance R. Application numérique : $e_1 = 6\ V$; $r_1 = 1\ \Omega$; $e_2 = 12\ V$; $r_2 = 2\ \Omega$; $R = 10\ \Omega$.

6. Théorème de MILLMAN

Il est utilisé lorsqu'il s'agit de calculer une tension dans un circuit comprenant plusieurs sources de tension.



On considère un nœud A auquel aboutissent k branches (figure ci-dessus). Les potentiels V_i des extrémités sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence V_{ref}. R_i est la résistance dans la branche i et G_i sa conductance. La loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 + I_2 + \cdots + I_k = 0$$

Cette loi des nœuds peut s'écrire aussi :

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

En remplaçant chaque résistance par la conductance, il vient :

$$(V_1 - V_A).G_1 + (V_2 - V_A).G_2 + \cdots + (V_k - V_A).G_k = 0$$

En développant chaque terme on a :

$$V_1.G_1 + V_2.G_2 + \cdots + V_k.G_k = V_A.G_1 + V_A.G_2 + \cdots + V_A.G_k$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{k} V_i G_i = V_A \sum_{i=1}^{k} G_i$$

Le théorème de MILLMAN stipule que la tension mesurée au nœud A est donc égale au produit de la résistance équivalente par la valeur de la source de courant, soit :

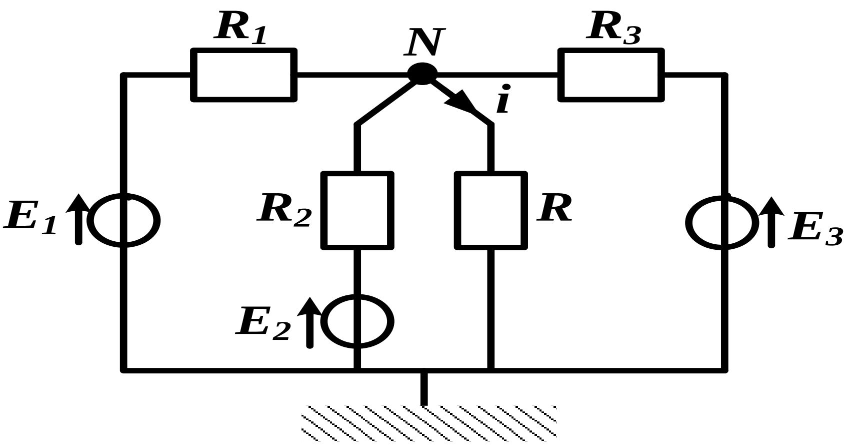
$$\boldsymbol{V_A = \sum_{i=1}^{k} V_i G_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} G_i = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \cdots + \frac{V_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}}}$$

Lorsque les branches comportent des générateurs de tension, on peut aussi écrire :

$$\boldsymbol{V_A = \sum_{i=1}^{k} E_i G_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} G_i = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}}}$$

<u>Exemple d'application</u> :

Soit à calculer le courant i dans la figure suivante :



Calculons d'abord V_N :

Les générateurs de tension étant reliés à la masse, le potentiel de la borne reliée à la résistance est égale à la f.é.m. d'où :

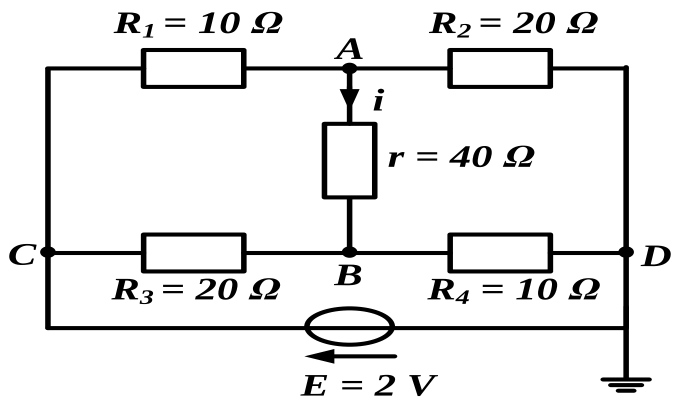
$$V_N = \sum_{i=1}^{k} E_i G_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} G_i = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}$$

Puisque $V_N - 0 = Ri$ il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{V_N}{R} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{1 + R(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_3})}}}$$

<u>Exercice d'application</u>

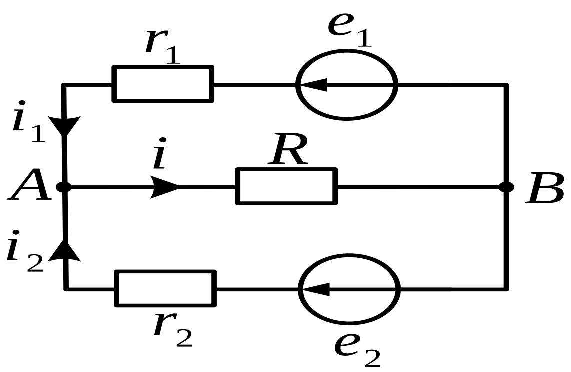
On considère le pont de résistances représenté par la figure ci-dessous, alimenté par une source de tension idéale de f.é.m. $E = 2V$



Par application du théorème de MILLMAN, calculer l'intensité du courant i dans la branche AB. On calculera d'abord V_A et V_B.

Exercice d'application

On considère le réseau de la figure suivante



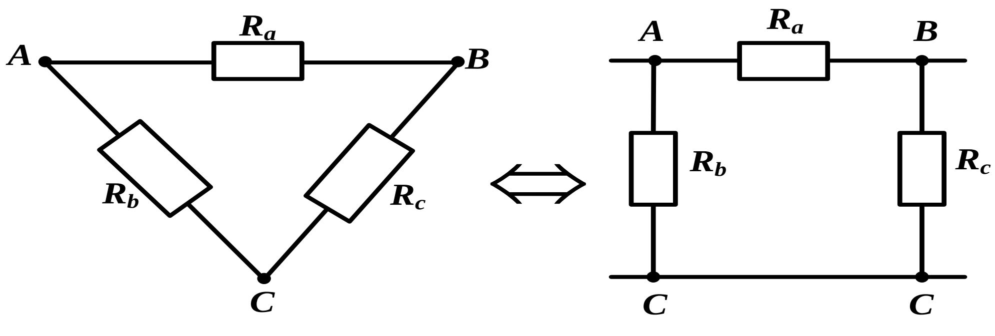
Par application du théorème de MILLMAN, déterminer le courant i circulant dans la résistance R. Application numérique : $e_1 = 6\,V$; $r_1 = 1\,\Omega$; $e_2 = 12\,V$; $r_2 = 2\,\Omega$; $R = 10\,\Omega$.

7. Théorème de KENNELY

Lorsqu'on fait l'étude des réseaux électriques, il est souvent nécessaire de remplacer trois résistances branchées en triangle par trois résistances branchées en étoile et choisies de telle sorte que les deux montages soient équivalents, c'est-à-dire le fonctionnement du reste du réseau ne soit pas perturbé par la substitution.

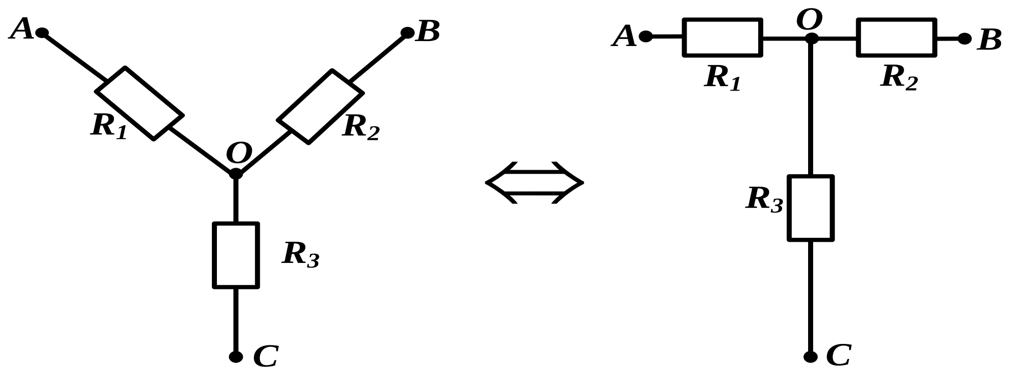
Ce théorème permet donc de transformer le schéma d'un réseau en triangle (ou en π) en un schéma en étoile (ou en T, ou en Y) qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation triangle-étoile.

Considérons trois nœuds d'un réseau électrique notés A, B et C. S'ils sont reliés deux à deux par des éléments formant une seule branche, il s'agit d'un montage triangle (a) ou en π (b) comme représenté par la figure suivante :



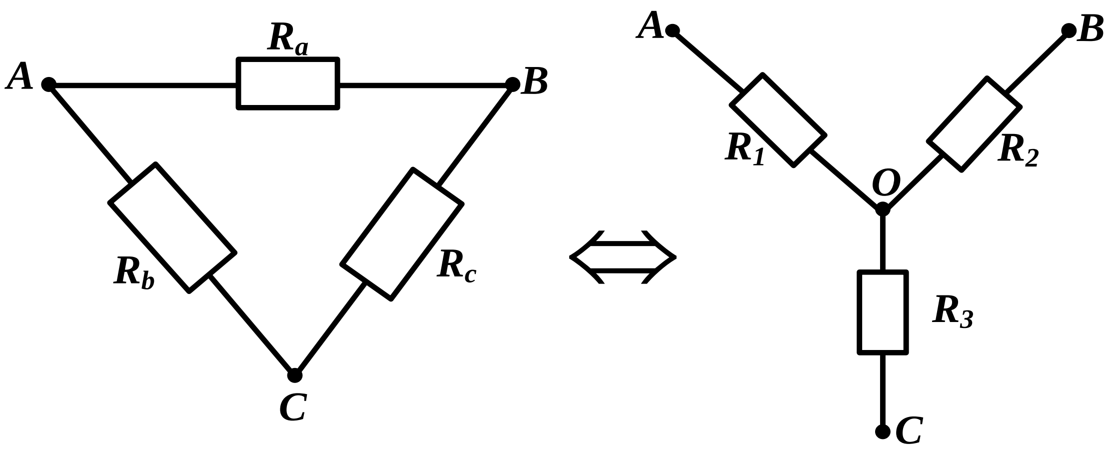
(a) **(b)**

Par contre si les trois branches auxquelles appartiennent les trois nœuds sont reliés à un nœud commun, le montage a une structure d'étoile comme indiqué par ci-dessous :



(a) **(b)**

Plusieurs méthodes existent pour trouver les équivalences entre la représentation triangle et la représentation étoile. L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure, les résistances vues entre les points $\boldsymbol{A-B}$, $\boldsymbol{A-C}$ et $\boldsymbol{B-C}$.



7.1. Relations de passage du triangle à l'étoile

On connaît les résistances $\boldsymbol{R_a}$, $\boldsymbol{R_b}$ et $\boldsymbol{R_c}$ du triangle. On veut passer à l'étoile ; pour cela on doit connaître les résistances $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_3}$. Chaque résistance de l'étoile est égale au produit des deux résistances du triangle qui l'encadrent divisé par la somme des résistances du triangle. Il vient donc :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}}$$

7.2. Relations de passage de l'étoile au triangle

On connaît les résistances $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ et $\boldsymbol{R_3}$ de l'étoile. On veut passer au triangle ; pour cela on doit connaître les résistances $\boldsymbol{R_a}$, $\boldsymbol{R_b}$ et $\boldsymbol{R_c}$. Chaque conductance du triangle est égale au produit des deux conductances de l'étoile qui l'encadrent divisé par la somme des conductances de l'étoile. Il vient donc :

$$\boxed{G_a = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

$$\boxed{G_b = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

$$\boxed{G_c = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

En remplaçant les conductances respectives par les résistances on déduit finalement :

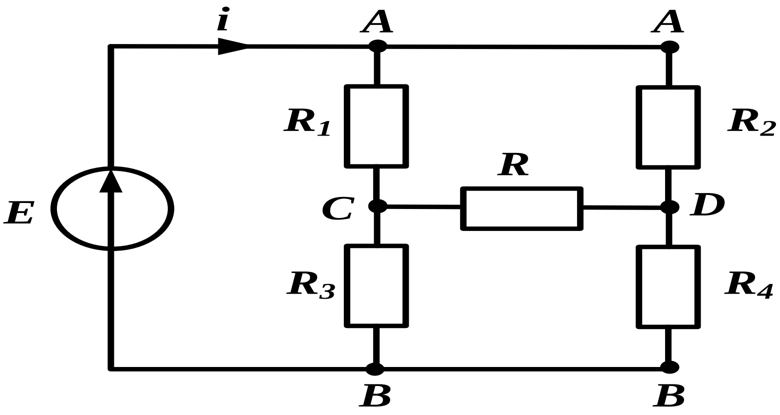
$$\boxed{R_a = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}}$$

$$\boxed{R_b = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}}$$

$$\boxed{R_c = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}}$$

Exercice d'application

Une source de tension continue délivre une tension d'amplitude E dans le circuit appelé ≪pont de Wheatstone≫ représenté par la figure ci-dessous :



On désire calculer l'expression du courant i.

1) Par application du théorème de KENNELY, transformer les résistances R_1, R_2 et R qui sont branchés en triangle en une représentation équivalente en étoile formée par R_A, R_C, R_D. On représentera le nouveau circuit du pont de Wheatstone avec les résistances étoiles R_A, R_C, R_D.

2) Déterminer la résistance équivalente $R_{éq}$ vue entre les bornes A et B.

3) En déduire l'expression du courant i qui circule dans la résistance équivalente.

Cas particulier : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.